الإجابة النموذجية لمقرر د/ السيد الكرمي — رياضيات

الفرقة الرابعة رياضيات (عام)

الفصل الأول ٢٠١٥ - ٢٠١٦

السؤال الأول ($٥ + ٥ + ٧ + ٨ + ٥٠ = ٧٥$) درجة

١- لتكن A مجموعة منتهية من n عنصر. لتكن زمرة التباديل للمجموعة A التطبيقات $f: A \to A$ المتباينة والشاملة (الغامرة) بالنسبة للتركيب S_n.

٢- إن T_g تطبيق لأنه إذا كان $x, y \in G$ بحيث $x = y$ فإن $gx = gy$ ومنه $T_g(x) = T_g(y)$ وهو كذلك متباين لأنه إذا كان $T_g(x) = T_g(y)$ فإن $gx = gy$ ومنه $x = y$ وهو شامل لأنه إذا كان $z \in G$ فإن $g^{-1}z \in G$ وأن

$T_g(g^{-1}z) = g(g^{-1}z) = z$.

٣- إثبات أن $\bar{G}$ مجموعة غير خالية لأن $T_e \in \bar{G}$ حيث $e \in G$ العنصر المحايد وأن $T_e = I_G$ لأنه إذا كان $x \in G$ فإن $T_e(x) = ex = x$

وأن عملية تركيب التطبيقات على G هي عملية داخلية (ثنائية) لأنه إذا كان $T_h, T_g \in \bar{G}$ حيث $g, h \in G$ فإن $T_g \cdot T_h = T_{gh} \in \bar{G}$ لأنه إذا كان $x \in G$ فإن

$T_g \cdot T_h(x) = T_g(hx) = g(hx) = (gh)x = T_{gh}(x)$

وأن T_e هو العنصر المحايد ولكي نعين T_g مقلوب هو $T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$

$T_g \cdot T_g^{-1}(x) = T_e(x) = x$

$T_g \cdot T_g^{-1}(x) = g \cdot T_g^{-1}(x) \Rightarrow T_g^{-1}(x) = g^{-1}x = T_{g^{-1}}(x)$

أي أن $T_g^{-1} = T_{g^{-1}}$

٤- لنعرف العلاقة $\varphi: G \to \bar{G}$ بالشكل $\varphi(g) = T_g$ وذلك إذا كان $g \in G$ نجد أن φ تطبيق لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ فإنه إذا كان $x \in G$ يكون $g_1x = g_2x$ ومنه أي أن $T_{g_1}(x) = T_{g_2}(x)$ ومنه $T_{g_1} = T_{g_2}$ ومنه $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ وأن φ تشاكل

$\varphi(g_1 \cdot g_2) = T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2} = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$

وهو متباين لأنه إذا كان $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ فإن $T_{g_1} = T_{g_2}$ وبالتالي $g_1x = g_2x$ أي أن $g_1 = g_2$ وهو أيضا شامل لأنه إذا كان $T_g \in \bar{G}$ فإن $g \in G$ وأن $\varphi(g) = T_g$.

٥- لنفرض أن D هي زمرة التباديل للزمرة G عندئذ فإن $\bar{G} \subseteq D$ وأن $G \cong \bar{G}$.

السؤال الثاني: ٢٥ درجة

لتكن $\rho: G \to GL_K(V)$ تمثيل خطي للزمرة G و W فضاء جزئي مستقر ولا تغيري من V يحقق $V = W \oplus W'$. سنبرهن على أن W' فضاء جزئي لا تغيري. بما أن W متمم فإنه يوجد $\pi \in End_K(V)$ حيث $\pi = I_W$ و $\pi(V) = W$ و $\pi(W') = 0$ بإعتبار التحويل الخطي $\pi': V \to V$ بالشكل $\pi' = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \rho(t)^{-1} \pi \rho(t)$ إذا $t \in G$ و $w \in V$ فمنه $\pi \rho(t)(w) \in W$ وهذا يعني أن

$\rho(t)^{-1}(\pi(\rho(t))(w)) \in W$

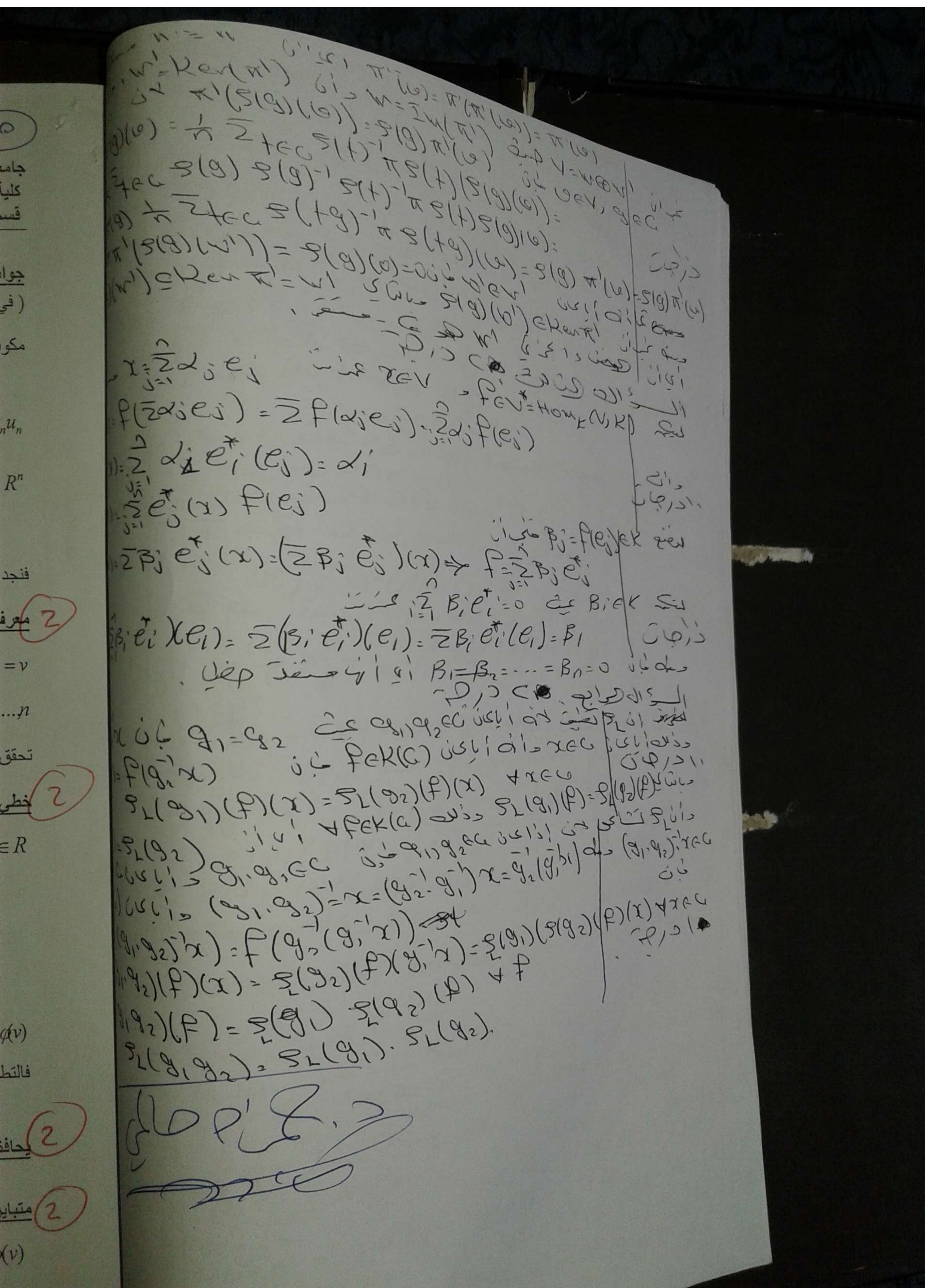
أي أن $\rho(t)^{-1} \pi \rho(t)(w) \in W$ أي أن $\pi'(w) = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \rho(t)^{-1} \pi \rho(t)(w) \in W$

ومنه إذا كان $w \in W$ فإن

$\pi'(w) = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \rho(t)^{-1} \pi \rho(t)(w) =$

$= \frac{1}{n} \sum \rho(t)^{-1} \pi \rho(t)(w) = \sum \rho(t)^{-1} \rho(t)(w) = w$

وهذا يعني أن $\pi' = I_W$ كما أن $\pi'(v) \in W$ وأن



$W' = \ker(\pi')$ ... $\pi'(\rho(g)(v)) = \pi'(\pi'(v)) = \pi'(v)$

$\rho(g)(v) = \frac{1}{n}\sum_{t\in G}\rho(t)^{-1}\rho(g)\pi\rho(t)\ldots$ ، $v = w \oplus v'$ ، $v \in V,\ g \in G$

$\sum_{t\in G}\rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(t)^{-1}\pi\rho(t)(\rho(g)(v))$

$\rho(g)\frac{1}{n}\sum_{t\in G}\rho(tg)^{-1}\pi\rho(tg)(v)$

$\pi'(\rho(g)(w')) = \rho(g)(v) = 0$ ... $= \rho(g)\pi'(v) = \rho(g)\pi'(v)$

$\rho(g)(W') \subseteq \ker \pi' = W'$ ... $\rho(g)(v') \in \ker\pi'$ ... W'

$x = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j$ ، $x \in V$ ، $f \in V^* = Hom_K(V,K)$

$f(\sum \alpha_j e_j) = \sum f(\alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j f(e_j)$

$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j$

$= \sum_{j=1}^{n} e_j^*(x) f(e_j)$

نضع $\beta_j = f(e_j) \in K$ حيث أن

$= \sum \beta_j e_j^*(x) = (\sum \beta_j e_j^*)(x) \Rightarrow f = \sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j^*$

لتكن $\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i^* = 0$ حيث $\beta_i \in K$

$(\sum \beta_i e_i^*)(e_1) = \sum(\beta_i e_i^*)(e_1) = \sum \beta_i e_i^*(e_1) = \beta_1$

ومنه فإن $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ أي أنها مستقلة خطياً.

السؤال الرابع . ٣ درجات

لنفرض أن $\rho_L(g_1) = \rho_L(g_2)$ حيث $g_1, g_2 \in G$ ... فإن $g_1 = g_2$ ، $x \in G$ ، $f \in K(G)$

$f(g_2^{-1}x)$ ... $\rho_L(g_1)(f)(x) = \rho_L(g_2)(f)(x) \quad \forall x \in G$ ... $\rho_L(g_1)(f) = \rho_L(g_2)(f)$

$\rho_L(g_1) = \rho_L(g_2)$ ... $\forall f \in K(G)$

$g_1, g_2 \in G$ ... $(g_1 g_2)^{-1}x \in G$

$(g_1 g_2)^{-1}x = (g_2^{-1} g_1^{-1})x = g_2^{-1}(g_1^{-1}x)$

$\rho_L(g_1 g_2)(f)(x) = f((g_1 g_2)^{-1}x) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = \rho_L(g_2)(f)(g_1^{-1}x) = \rho_L(g_1)(\rho_L(g_2)(f))(x) \quad \forall x \in G$

$\rho_L(g_1 g_2)(f) = \rho_L(g_1)\rho_L(g_2)(f) \quad \forall f$

$\rho_L(g_1 g_2) = \rho_L(g_1)\cdot\rho_L(g_2)$